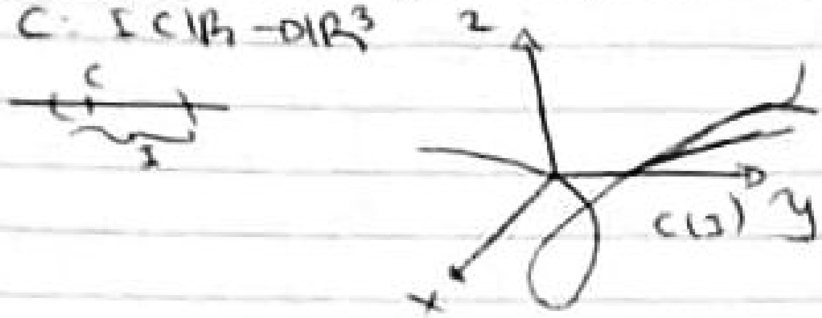
24/10/19

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^3$

Ορισμός: Καλούμε καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ κάθε απεικόνιση $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$



Η καμπύλη είναι τάξης C^r, $r \geq 3$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Η c καλείται κανονική αν $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

Η εφαπτόμενη ευθεία στο $t \in I$ είναι: $\vec{r} = c(t) + \lambda c'(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Γεωμετρικές ισοδύναμες καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ είναι γεωμ. ισοδύναμες αν $\exists\, T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$

$T = T_{r_0} \circ A$, A ορθ. μετασχ.

$\tilde{c}'(t) = A c'(t) \Rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(t)\|$

Μήκος: $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,dt$

Μήκος τόξου: $s: I \subset \mathbb{R}$ $\quad s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\|\,du$

$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0$

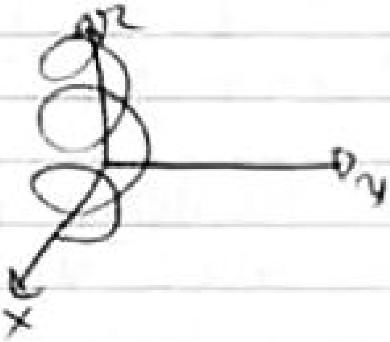
$s = s(t) \Leftrightarrow t = t(s) = t(s)$

$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'(t)\|} > 0$

Μια καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου αν-ν $\|c'(t)\| = 1 \ \forall t$

Παράδειγμα Κυλινδρική έλικα

$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$
$a > 0$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$



$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ Η c είναι κανονική καμπύλη

Καμπυλότητα καμπυλών στο $\mathbb{R}^3$

$c: I \to \mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο

$\vec{t}' = k \cdot \vec{n}$ | $\Leftrightarrow$ $\vec{c}'' = k\vec{n}$
$\vec{n}' = -k\vec{t}$

Ορισμός Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου σε I. Καλούμε καμπυλότητα της c την συνάρτηση $k: I \to [0, +\infty)$ με $k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$

Αν ισχύει $\kappa(s)=0 \ \forall s\in I$ τότε $\ddot{c}(s)=0 \ \forall s \Rightarrow$
$\Rightarrow \dot{c}(s) = v$ = σταθ. διαν. $\Rightarrow c(s) = p_0 + s v$, $\|v\| = 1$

$\tilde{c} = T\circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = \tau_b \circ A$

$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c} \Rightarrow \|\dot{\tilde{c}}\| = \|A\dot{c}\| = \|\dot{c}\| = 1 \Rightarrow s$ είναι μήκος και για την $\tilde{c}$

$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}$

$\tilde{\kappa}(s) = \|\ddot{\tilde{c}}(s)\| = \|A\ddot{c}(s)\| = \|\ddot{c}(s)\| = \kappa(s) \quad \forall s\in I$

<u>Καμπυλότητα κανονικής καμπύλης του $\mathbb{R}^3$ με τυχούσα παράμετρο</u>

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ είναι κανονική καμπύλη με παράμετρο $t\in I$. Θεωρώ την παράμετρο v $\tilde{c} = c\circ \ell$ με παράμετρο το μήκος τόξου s

$s = s(t) \Leftrightarrow t = t(s) = \ell(s)$. Η $\tilde{c}(s)$ έχει καμπύλη $\tilde{\kappa}(s)$ καλούμε καμπυλότητα της c τη συνάρτηση $\kappa: I\to[0,+\infty)$ με $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t))$ ή $\kappa = \tilde{\kappa}\circ s$

<u>Υπολογισμός καμπυλότητας</u>

$\kappa = \|\ddot{c}\| = \|\dot{c}\|\cdot\|\ddot{c}\| \sin(\dot{c},\ddot{c})$

$\|\dot{c}\| = 1 \Rightarrow \langle\dot{c},\dot{c}\rangle = 1 \Rightarrow (\langle\dot{c},\dot{c}\rangle)^{\cdot} = 0$

$\Rightarrow \langle\dot{c},\ddot{c}\rangle = 0$

$\kappa = \|\dot{c}\times\ddot{c}\|$

$\dot{c} = \dfrac{dc}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\dfrac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \dfrac{dt}{ds}c'}$

$\ddot{c} = \dfrac{d\dot{c}}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{dt}{ds}c'\right) = \dfrac{d^2t}{ds^2}c' + \dfrac{dt}{ds}\dfrac{d}{ds}c' =$

$$= \frac{d^2t}{ds^2} c' + \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} \frac{dc'}{dt}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right) c'$$

$$\dot{c} \times \ddot{c} = \frac{dt}{ds} c' \times \left(\frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{c} \times \ddot{c} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c' \times c'' \Rightarrow k = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| = \left|\frac{dt}{ds}\right|^3 \|c' \times c''\|$$

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, du \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$$

<u>Πρόταση</u>: Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ είναι η συνάρτηση $k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$

<u>Η καμπυλότητα της κυλινδρικής έλικας</u>

$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a > 0$, $b \neq 0$

$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \neq (0,0,0)$

$c''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$

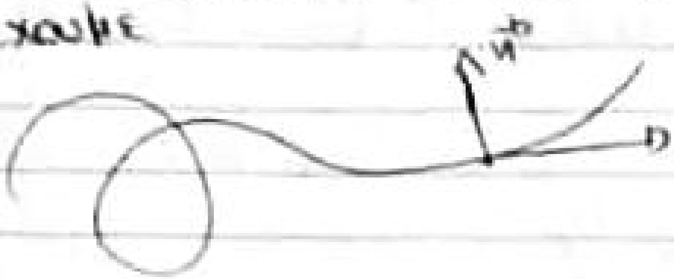
$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)$$

$\|c'(t) \times c''(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{a^2+b^2}$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$k(t) = \frac{a\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}} = \text{σταθ.}$$

Για καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο έχουμε



$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}$

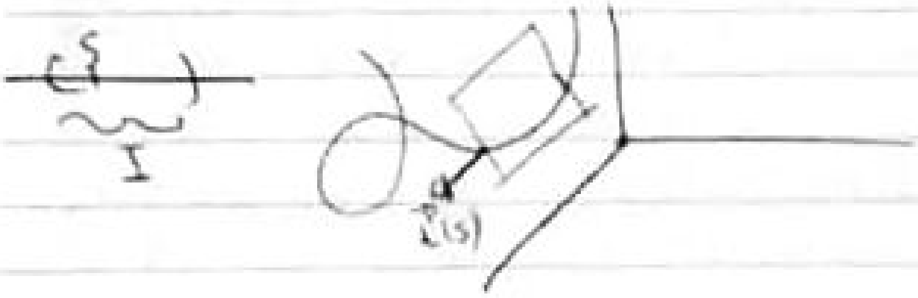
$\dot{\vec{n}} = -k\vec{t}$

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$

Ορίζω το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα ως $\boxed{\vec{t}(s) = \dot{c}(s)}$

$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 \Rightarrow (\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle)' = 0 \Rightarrow 2\langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 0$



$\dot{c} \perp \ddot{c} \Rightarrow \ddot{c} \perp \vec{t}$

$k = \|\ddot{c}\|$

ΥΠΟΘΕΣΗ: Μελετώ καμπύλες ~~...~~ κανονικές καμπυλότητας $k(s) > 0 \ \forall s$

Ορισμός: Για καμπύλες με παντού θετική καμπυλότητα

(i) το πρώτο (ή κύριο) μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το $\boxed{\vec{n}(s) = \dfrac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|} = \dfrac{\ddot{c}(s)}{k(s)}}$

(ii) Το δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$

Η ορθομοναδιαία και δεξιόστροφη βάση $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ καλείται πλαίσιο Frenet της καμπύλης

$$\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}$$
$$\dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t} + \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle \vec{b}$$
$$\dot{\vec{b}} =$$

$$\dot{\vec{t}} = \ddot{c} = \kappa \vec{n} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}}$$

$$\dot{\vec{n}} = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle + \cancel{\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n} \rangle \vec{n}} + \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle \vec{b}$$

$$\dot{\vec{b}} = \cancel{\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle \vec{t}} + \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle \vec{n} + \cancel{\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle \vec{b}}$$

$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle)' = 0$$

$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle = (\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle)' - \langle \vec{b}, \dot{\vec{n}} \rangle = -\langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle$$

<u>Στρέψη καμπύλης του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$, καμπυλότητα $\kappa(s) > 0$ $\forall s \in I$ και πλαίσιο Frenet $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$. Η συνάρτηση $\tau: I \to \mathbb{R}$ με $\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle$ καλείται <u>στρέψη</u> της c

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} &= -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n} \end{aligned}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \\ \dot{\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = \frac{1}{k}\ddot{c} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{n}} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}}$

$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \dot{c} \times \left(\frac{1}{k}\ddot{c}\right)$ $\boxed{\vec{b} = \frac{1}{k}\dot{c} \times \ddot{c}}$

Άρα: $\tau = \left\langle \left(\frac{1}{k}\right)^{\cdot}\ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}, \frac{1}{k}\dot{c} \times \ddot{c} \right\rangle =$

$= \frac{\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dddot{c} \rangle}{k^2}$

$\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$
$T = T_v \circ A$
$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c}$, $\ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}$, $\dddot{\tilde{c}} = A\dddot{c}$

Πρόταση: Η στρέψη μιας καμπύλης c του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall s \in I$ είναι η συνάρτηση

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$$

Είναι γεωμετρική έννοια? Η στρέψη της $\tilde{c}$ είναι
$\tilde{\tau} = \frac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{k^2} = \frac{[A\dot{c}, A\ddot{c}, A\dddot{c}]}{k^2} = \pm\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{\tau} = \pm\tau}$

Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με τυχαία παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο t και καμπυλότητα $k(t) > 0 \ \forall t \in I$

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du \Rightarrow \frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0$$

$$s = s(t) \Leftrightarrow t = t(s) = f(s), \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$$

Η $\bar{c} = c \circ f$ έχει παράμετρο μήκος τόξου και στρέψη $\bar{\tau}(s)$

Ορισμός: Καλούμε στρέψη της c τη συνάρτηση
$\tau: I \to \mathbb{R} \quad \tau = \bar{\tau} \circ s$
$\tau(t) = \bar{\tau}(s(t))$

$k = \bar{k} \circ s, \quad k(t) = \bar{k}(s(t))$

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \frac{dt}{ds} c'}$$

$$\boxed{\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}$$

$$\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \frac{dt}{ds}\frac{dc'}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt}$$

Συνέχεια...

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3}c' + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{dc'}{ds} + 2\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{dc''}{ds} =$$

$$= \frac{d^3t}{ds^3}c' 3\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt}$$

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3}c' + \frac{3d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds}c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''$$

$$[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}] = \left[\frac{dt}{ds}c', \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', \frac{d^3t}{ds^3} + \frac{3d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds}c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''\right] =$$

$$= \left[\frac{dt}{ds}c', \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c', \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''\right] = \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [c', c'', c''']$$

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$$

$$[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}] = \frac{[c', c'', c''']}{\|c'\|^6}$$

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{\kappa^2} = \frac{\frac{[c', c'', c''']}{\|c'\|^6}}{\frac{\|c'\times c''\|^2}{\|c'\|^4}}$$

<u>Πρόταση:</u> $\tau = \dfrac{[c', c'', c''']}{\|c'\times c''\|^2}$

$$\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}, \quad \vec{b} = \frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|} \qquad \vec{n} = \vec{b}\times\vec{t}$$

Κυλινδρική έλικα

$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a>0, b\neq 0$

$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$
$c''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$
$c'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)$

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$c'(t) \times c''(t) = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2) = a(b\sin t, -b\cos t, a)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, $s = \int_0^t \|c'(u)\| du = t\sqrt{a^2+b^2}$

$\|c'(t) \times c''(t)\| = a\sqrt{a^2+b^2}$

$[c', c'', c'''] = \langle c' \times c'', c''' \rangle = a^2 b \sin^2 t + a^2 b \cos^2 t =$
$= a^2 b$

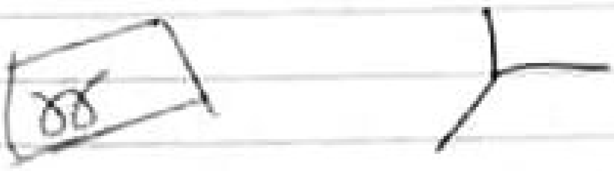
$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+b^2)} \Rightarrow k(t) = \frac{a}{a^2+b^2} > 0$

$\tau(t) = \frac{[c'(t), c''(t), c'''(t)]}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)}$

$$\boxed{\tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}}$$

Επίπεδες καμπύλες

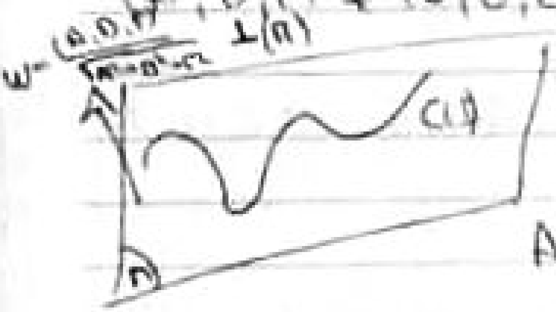
Ορισμός: Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται επίπεδη αν και μόνο αν η εικόνα της περιέχεται σε κάποιο επίπεδο



Πρόταση: Έστω c καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ με παντού θετική καμπυλότητα. Τότε η c είναι επίπεδη αν-ν $\tau = 0$ παντού

Απόδειξη: Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$

Έστω ότι η c είναι επίπεδη, δηλαδή η εικόνα της περιέχεται σε επίπεδο $(\Pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$
$(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$



$c(s) = (x(s), y(s), z(s))$

Από υπόθεση ισχύει

$A x(s) + B y(s) + \Gamma z(s) + \Delta = 0 \quad \forall s \in I$

$A \dot{x}(s) + B \dot{y}(s) + \Gamma \dot{z}(s) = 0 \quad (\Rightarrow)$

$\langle w, \dot{c}(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I \Leftrightarrow \langle w, \vec{t}(s) \rangle = 0 \ \forall s \in I$

$\langle w, \dot{\vec{t}}(s) \rangle = 0 \xrightarrow[\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}]{} \langle w, \kappa(s) \vec{n}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa(s) \langle w, \vec{n}(s) \rangle = 0 \xRightarrow{\kappa(s) > 0} \langle w, \vec{n}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{b}(s) = \pm w \Rightarrow \dot{\vec{b}}(s) = 0 \Rightarrow -\tau(s) \vec{n}(s) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau(s) = 0 \quad \forall s \in I$

Αντίστροφα, έστω $\tau(s) = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\vec{n}(s) = 0$

$\Rightarrow \vec{b}(s) = w =$ σταθ διαν

$$w = (a, b, c) \qquad f(s) = a\,x(s) + b\,y(s) + c\,z(s) = \langle w, c(s) \rangle$$

$$\dot{f}(s) = \langle w, \dot{c}(s) \rangle = \langle w, \vec{t}(s) \rangle = \langle b, \vec{t}(s) \rangle \geq 0$$